

## Hajdú-Bihar megyei középiskolák matematika versenye 2015/2016

### 11. évfolyam

1. Arthur király meg akar győződni arról, hogy Sir Lancelot még mindig jól forgatja a kardot. Ezért fölszólítja lovagját, hogy egyetlen kardcsapással szeljen ketté három fölfüggesztett dinnyét úgy, hogy mindegyik két egyenlő felszínű és térfogatú darabra essen szét. A dinnyék gömb alakúak, nem feltétlen azonos méretűek, és nem speciális módon vannak elhelyezve, de mindegyik elérhető a karddal. Eleget tud-e tenni a lovag királya kérésének?
2. Tegyük fel, hogy az  $x$ ;  $y$ ;  $a$ ;  $b$ ;  $c$  valós számok kielégítik az
$$\begin{aligned}x + y &= a \\x^2 + y^2 &= b \\x^3 + y^3 &= c\end{aligned}$$
egyenletrendszer. Igazolja, hogy ekkor  $a^3 - 3ab + 2c = 0$  teljesül!
3. Mely  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények tesznek eleget a következő egyenletnek?
$$f(x) + 2f(-x) = 3 \cos x$$
4. Az ABC háromszög BC oldalával párhuzamos egyenes két egyenlő kerületű és egyenlő területű síkidomra bontja a háromszöget. Igazolja, hogy ekkor teljesül az alábbi összefüggés!
$$AB + AC = (1 + \sqrt{2})BC$$
5. Fölbontható-e a pozitív racionális számok halmaza két nem üres, diszjunkt halmaz egyesítésére úgy, hogy mindkét halmaz zárt legyen az összeadásra? (Valamely halmaz zárt az összeadásra, ha bármely két elemével együtt azok összegét is tartalmazza.)